



MATH EXCELLENCE

# Test diagnostique

Entrée en 2<sup>e</sup> Bac Sciences Maths

---

Vingt questions sur les prérequis de 1<sup>re</sup> Bac. Une heure trente. Un corrigé détaillé et une grille de lecture.

**Professeur de mathématiques**

Fès — Maroc

[mathexce.com](https://mathexce.com)

Document gratuit · Travail — Méthode — Réussite · 06 76 40 91 06

## Σ Mode d'emploi

Lis cette page avant de commencer

**Ce test ne note pas ton niveau en 2<sup>e</sup> Bac.** Il mesure une seule chose : est-ce que les outils de 1<sup>re</sup> Bac sont *disponibles* quand tu en as besoin. C'est le vrai facteur qui sépare, en Sciences Maths, les élèves qui suivent de ceux qui décrochent en novembre.

- **Durée : 1 h 30.** Chronomètre-toi vraiment. Un exercice que tu sais faire en dix minutes au lieu de trois, c'est un exercice que tu ne finiras pas le jour de l'examen.
- **Sans le cours, sans corrigé, sans téléphone.** La calculatrice est autorisée : aucune question ne la réclame.
- **Rédige.** En Sciences Maths, la moitié des points perdus le sont sur la justification, pas sur le calcul. Écris tes phrases entières.
- **Ne saute rien.** Si tu bloques, laisse un blanc et continue : une question laissée vide est une information utile, une question devinée ne l'est pas.
- **Corrige-toi ensuite** avec le corrigé détaillé (page 4), en appliquant le barème indiqué en marge de chaque question.

## La grille de lecture

| Score   | Ce que ça veut dire                                                                                                                                                                                 |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 16 – 20 | Tes prérequis sont solides. Tu peux attaquer les limites et les suites de 2 <sup>e</sup> Bac dès la rentrée. Vise la régularité, pas la remise à niveau.                                            |
| 11 – 15 | Les bases sont là, mais deux ou trois outils te manquent au moment où tu en as besoin. Repère lesquels grâce au tableau de la dernière page et reprends-les <i>avant</i> la Toussaint.              |
| 6 – 10  | La 2 <sup>e</sup> Bac SM va être difficile en l'état. Ce n'est pas une fatalité : il te faut un mois de reprise ciblée sur les prérequis, en parallèle du programme.                                |
| 0 – 5   | Le problème n'est pas le programme de 2 <sup>e</sup> Bac, il est en amont. Écris-moi avant la rentrée : on regarde ensemble si la filière Sciences Maths est le bon choix, et à quelles conditions. |

### ★ Le vrai indicateur, ce n'est pas le total

Regarde *où* tu as perdu tes points. Perdre 4 points répartis sur les vingt questions n'a rien à voir avec perdre 4 points concentrés sur la partie C : le premier cas est du bruit, le second est un trou. Le tableau de la dernière page te donne la lecture par partie.



## Partie A — Automatismes

8 questions · 0,5 pt chacune · 4 points

**20 minutes maximum pour cette partie.** Ce sont des gestes qui doivent être automatiques : si tu réfléchis plus d'une minute à l'une de ces questions, note-le, c'est déjà un résultat.

- A.1 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ . [0,5 pt]
- A.2 Écrire sous la forme d'une seule fraction :  $\frac{2x-1}{x+3} - 1$ . [0,5 pt]
- A.3 Donner la forme canonique de  $f(x) = x^2 - 6x + 11$ , puis son minimum. [0,5 pt]
- A.4 Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'équation  $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ . [0,5 pt]
- A.5 Calculer la dérivée de  $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+1}$ . [0,5 pt]
- A.6 Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$ . [0,5 pt]
- A.7 Écrire  $|x-2| + |x+1|$  sans valeur absolue pour  $x \in ]-1, 2[$ . [0,5 pt]
- A.8 Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = 3 - \frac{2}{n}$ . Étudier son sens de variation. [0,5 pt]



## Partie B — Fonctions

2 exercices · 5 points

## Exercice B.1 — étude d'une fonction rationnelle [2,5 pt]

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

- Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.
- Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$  pour tout  $x \neq 1$ .
- En déduire que la droite  $(\Delta) : y = 2x + 1$  est asymptote à  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$  et de  $-\infty$ .
- Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de  $(\Delta)$ .

## Exercice B.2 — dérivabilité en un point [2,5 pt]

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x^2 - 4|$ .

- Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche en 2.
- $f$  est-elle dérivable en 2? Justifier.
- Interpréter géométriquement le résultat et donner les équations des demi-tangentes à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 2.

## Σ Partie C — Suites et raisonnement

2 exercices · 5 points

### Exercice C.1 — suite récurrente [2,5 pt]

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 2$ .
2. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
3. En déduire que  $(u_n)$  converge, puis déterminer sa limite.

### Exercice C.2 — récurrence et divisibilité [2,5 pt]

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , le nombre

$$A_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

est divisible par 7.

## Σ Partie D — Géométrie et trigonométrie

2 exercices · 6 points

### Exercice D.1 — produit scalaire dans le plan [3 pt]

$ABC$  est un triangle tel que  $AB = 4$ ,  $AC = 3$  et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ .

1. Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
2. En déduire la longueur  $BC$ .
3. Soit  $I$  le milieu de  $[BC]$ . Exprimer  $\overrightarrow{AI}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ , puis calculer  $AI$ .
4. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ .

### Exercice D.2 — équations trigonométriques [3 pt]

1. Résoudre dans  $] -\pi, \pi]$  l'équation  $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x : \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ .
3. En déduire les solutions dans  $] -\pi, \pi]$  de l'équation  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$ .

**Stop.** Ne tourne la page qu'une fois le temps écoulé. Le corrigé n'a de valeur que si tu as vraiment cherché.

 **Σ Corrigé — Partie A**

Barème : 0,5 pt par question, pas de demi-point

**Corrigé A.1**

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ . Le trinôme est du signe de  $a = 1 > 0$  à l'extérieur des racines, négatif entre elles. Donc  $S = [2, 3]$ .

**Corrigé A.2**

$$\frac{2x-1}{x+3} - 1 = \frac{2x-1-(x+3)}{x+3} = \frac{x-4}{x+3}, \text{ pour } x \neq -3.$$

**Corrigé A.3**

$x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 - 9 + 11 = (x - 3)^2 + 2$ . Le minimum vaut 2, atteint en  $x = 3$ .

**Corrigé A.4**

$\cos(2x) = \cos \frac{\pi}{3}$  équivaut à  $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$  ou  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ . Dans  $[0, 2\pi[ : S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$ .

**Corrigé A.5**

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+2x+3}{(x^2+1)^2}.$$

**Corrigé A.6**

Forme indéterminée  $\infty - \infty$ . On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

**Corrigé A.7**

Pour  $x \in ]-1, 2[ : x - 2 < 0$  donc  $|x - 2| = 2 - x$ ;  $x + 1 > 0$  donc  $|x + 1| = x + 1$ . La somme vaut  $(2 - x) + (x + 1) = 3$ .

**Corrigé A.8**

$u_{n+1} - u_n = \left(3 - \frac{2}{n+1}\right) - \left(3 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)} > 0$ . La suite est strictement croissante.

 **Corrigé — Partie B**

## Fonctions

**Corrigé B.1 (2,5 pt)**

**1. Limites (1 pt).** En  $\pm\infty$ , le quotient se comporte comme  $\frac{2x^2}{x} = 2x$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

En 1, le numérateur tend vers  $2 - 1 + 1 = 2 > 0$  et le dénominateur vers 0, en gardant le signe de  $x - 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation  $x = 1$  est asymptote verticale à  $\mathcal{C}_f$ .

**2. Décomposition (0,75 pt).** La division euclidienne de  $2x^2 - x + 1$  par  $x - 1$  donne  $2x^2 - x + 1 = (x - 1)(2x + 1) + 2$ , d'où, pour  $x \neq 1$  :

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x - 1}, \quad \text{soit } a = 2, b = 1, c = 2.$$

**3. Asymptote oblique (0,5 pt).**  $f(x) - (2x + 1) = \frac{2}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ , donc  $(\Delta) : y = 2x + 1$  est asymptote oblique à  $\mathcal{C}_f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**4. Position relative (0,25 pt).** Le signe de  $f(x) - (2x + 1) = \frac{2}{x - 1}$  est celui de  $x - 1$  :

— si  $x > 1$  :  $f(x) > 2x + 1$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $(\Delta)$ ;

— si  $x < 1$  :  $f(x) < 2x + 1$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au-dessous de  $(\Delta)$ .

$\mathcal{C}_f$  et  $(\Delta)$  ne se coupent en aucun point.

**Corrigé B.2 (2,5 pt)**

Sur un voisinage de 2 : pour  $x > 2$ ,  $x^2 - 4 > 0$  donc  $f(x) = x^2 - 4$ ; pour  $x < 2$  (et  $x > -2$ ),  $x^2 - 4 < 0$  donc  $f(x) = 4 - x^2$ . On a  $f(2) = 0$ .

**1. Les deux taux d'accroissement (1,5 pt).**

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-(x + 2)) = -4.$$

Donc  $f'_d(2) = 4$  et  $f'_g(2) = -4$ .

**2. Conclusion (0,5 pt).**  $f'_d(2) \neq f'_g(2)$  :  $f$  n'est pas dérivable en 2.

**3. Interprétation (0,5 pt).** Le point  $A(2, 0)$  est un *point anguleux* de  $\mathcal{C}_f$  : la courbe y admet deux demi-tangentes distinctes, d'équations

$$y = 4(x - 2) \text{ pour } x \geq 2, \quad y = -4(x - 2) \text{ pour } x \leq 2.$$

 **Corrigé — Partie C**

Suites et raisonnement

**Corrigé C.1 (2,5 pt)****1. Encadrement par récurrence (1 pt).** Posons  $P(n) : 0 \leq u_n \leq 2$ .*Initialisation* :  $u_0 = 0$ , donc  $0 \leq u_0 \leq 2$  :  $P(0)$  est vraie.*Hérédité* : supposons  $P(n)$  vraie pour un  $n$  fixé. Alors  $2 \leq u_n + 2 \leq 4$ , et comme la fonction racine carrée est croissante sur  $[0, +\infty[$  :

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2.$$

Comme  $\sqrt{2} > 0$ , on a bien  $0 \leq u_{n+1} \leq 2$  :  $P(n+1)$  est vraie.Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .**2. Monotonie (1 pt).** Pour  $x \in [0, 2]$  :

$$\sqrt{x+2} \geq x \iff x+2 \geq x^2 \iff x^2 - x - 2 \leq 0 \iff (x-2)(x+1) \leq 0,$$

ce qui est vrai sur  $[-1, 2]$ , donc en particulier sur  $[0, 2]$ . (L'élévation au carré est licite car les deux membres sont positifs.)En appliquant cela à  $x = u_n \in [0, 2]$  :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \geq u_n$ . La suite  $(u_n)$  est croissante.**3. Convergence et limite (0,5 pt).**  $(u_n)$  est croissante et majorée par 2 : d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel  $\ell$ , avec  $0 \leq \ell \leq 2$ .En passant à la limite dans  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$  (la fonction  $x \mapsto \sqrt{x+2}$  est continue sur  $[0, 2]$ ) :

$$\ell = \sqrt{\ell + 2} \iff \ell^2 = \ell + 2 \text{ et } \ell \geq 0 \iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0 \text{ et } \ell \geq 0.$$

Donc  $\ell = 2$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .**Corrigé C.2 (2,5 pt)**Posons  $P(n) : 7 \mid A_n$  où  $A_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ .*Initialisation* :  $A_0 = 3^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7 = 7 \times 1$ .  $P(0)$  est vraie.*Hérédité* : supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $A_n = 7k$ . Alors

$$A_{n+1} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}.$$

L'astuce consiste à faire apparaître  $A_n$  en écrivant  $2 = 9 - 7$  :

$$A_{n+1} = 9 \cdot 3^{2n+1} + (9 - 7) \cdot 2^{n+2} = 9(3^{2n+1} + 2^{n+2}) - 7 \cdot 2^{n+2} = 9A_n - 7 \cdot 2^{n+2}.$$

Donc  $A_{n+1} = 9 \times 7k - 7 \cdot 2^{n+2} = 7(9k - 2^{n+2})$ , qui est bien un multiple de 7.  $P(n+1)$  est vraie.Par récurrence,  $A_n$  est divisible par 7 pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*Vérification rapide* :  $A_1 = 27 + 8 = 35 = 7 \times 5$  et  $A_2 = 243 + 16 = 259 = 7 \times 37$ .

 **Corrigé — Partie D**

## Géométrie et trigonométrie

**Corrigé D.1 (3 pt)****1. Produit scalaire (0,5 pt).**

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = 4 \times 3 \times \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6.$$

**2. Longueur BC (0,75 pt).**  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ , donc

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 + 16 - 12 = 13, \quad \text{d'où } BC = \sqrt{13}.$$

**3. La médiane AI (1 pt).**  $I$  étant le milieu de  $[BC]$  :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ . Donc

$$AI^2 = \frac{1}{4} (AB^2 + AC^2 + 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{16 + 9 + 12}{4} = \frac{37}{4}, \quad AI = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

**4. Ensemble de points (0,75 pt).**  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$  signifie que  $M$  voit le segment  $[BC]$  sous un angle droit, ou que  $M$  est confondu avec  $B$  ou  $C$ . L'ensemble cherché est donc le **cercle de diamètre  $[BC]$** , c'est-à-dire le cercle de centre  $I$  et de rayon  $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ .**Corrigé D.2 (3 pt)****1. Équation du second degré en  $\cos x$  (1 pt).** Posons  $X = \cos x$ , avec  $X \in [-1, 1]$ . L'équation devient  $2X^2 - X - 1 = 0$ , de discriminant  $\Delta = 1 + 8 = 9$ , donc  $X = \frac{1+3}{4} = 1$  ou  $X = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ .—  $\cos x = 1$  donne  $x = 0$  dans  $] -\pi, \pi]$ ;—  $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$  donne  $x = \frac{2\pi}{3}$  ou  $x = -\frac{2\pi}{3}$ .

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

**2. Mise sous forme  $R \sin(x - \varphi)$  (1 pt).**

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \left( \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) = \sqrt{3} \sin x - \cos x.$$

**3. Résolution (1 pt).** L'équation équivaut à  $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ , soit  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ . D'où

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = \pi + 2k\pi$ .

$$\text{Dans } ] -\pi, \pi] : S = \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi \right\}.$$

 Ton score, et ce qu'il faut en faire

Dernière page

## Lecture par partie

| Partie                                | Sur | Si tu as perdu la moitié des points ou plus                                                                                                                                               |
|---------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>A — Automatismes</b>               | 4   | Le problème n'est pas la compréhension, c'est l'entraînement. Il te faut du volume : vingt calculs par jour pendant trois semaines, pas un chapitre de plus.                              |
| <b>B — Fonctions</b>                  | 5   | C'est le prérequis le plus coûteux : toute la 2 <sup>e</sup> Bac est de l'analyse. Reprends limites et dérivation de 1 <sup>re</sup> Bac <i>avant</i> d'ouvrir le programme de terminale. |
| <b>C — Suites et raisonnement</b>     | 5   | C'est un problème de rédaction plus que de maths. La récurrence a une structure fixe : initialisation, hypothèse, hérédité, conclusion. Écris-la en entier dix fois.                      |
| <b>D — Géométrie et trigonométrie</b> | 6   | Souvent négligé, et pourtant c'est là que les points sont les plus faciles à récupérer : les formules sont peu nombreuses et les exercices très typés.                                    |

## Les trois chapitres à reprendre en priorité

Sur [mathexce.com](https://mathexce.com), les cours de 1<sup>re</sup> Bac SM, les fiches de révision et les QCM auto-corrigés sont en accès libre — sans compte, sans email à donner.

1. **Généralités sur les fonctions et limites** : c'est le socle de la partie B.
2. **Suites numériques et raisonnement par récurrence** : le socle de la partie C, et le premier chapitre de 2<sup>e</sup> Bac.
3. **Produit scalaire et calcul trigonométrique** : la partie D, qui revient telle quelle dans les nombres complexes.

## ★ Si tu veux qu'on regarde ta copie ensemble

Envoie-moi ton score par partie sur WhatsApp au **06 76 40 91 06**. Je te réponds avec les deux ou trois choses précises à reprendre en priorité dans ton cas — que tu rejoignes le *Programme Excellence* ou non. Ça ne coûte rien et ça t'évite de travailler au hasard pendant un mois.

Le programme d'accompagnement, son contenu semaine par semaine et son tarif sont décrits sur [mathexce.com/programme](https://mathexce.com/programme).

Document gratuit — Math Excellence — Professeur de mathématiques — [mathexce.com](https://mathexce.com)  
Tu peux l'imprimer et le partager avec tes camarades.