



MATH EXCELLENCE

Test diagnostique

Entrée en 2^e Bac PC / SVT

Vingt questions sur les prérequis de 1^{re} Bac. Une heure trente. Un corrigé détaillé et une grille de lecture.

Professeur de mathématiques

Fès — Maroc

mathexce.com

Document gratuit · Travail — Méthode — Réussite · 06 76 40 91 06

Σ Mode d'emploi

Lis cette page avant de commencer

Ce test ne note pas ton niveau en 2^e Bac. Il mesure une seule chose : est-ce que les outils de 1^{re} Bac sont *disponibles* quand tu en as besoin. En PC et en SVT, les maths ne sont pas la matière la plus lourde du coefficient — mais c'est celle où l'on perd le plus de points par manque d'automatismes, pas par manque d'intelligence.

- **Durée : 1 h 30.** Chronomètre-toi vraiment. Un exercice que tu sais faire en dix minutes au lieu de trois, c'est un exercice que tu ne finiras pas le jour de l'examen.
- **Sans le cours, sans corrigé, sans téléphone.** La calculatrice est autorisée : aucune question ne la réclame.
- **Rédige.** Une réponse juste sans justification vaut la moitié des points à l'examen national. Écris tes phrases entières.
- **Ne saute rien.** Si tu bloques, laisse un blanc et continue : une question laissée vide est une information utile, une question devinée ne l'est pas.
- **Corrige-toi ensuite** avec le corrigé détaillé (page 4), en appliquant le barème indiqué en marge de chaque question.

La grille de lecture

Score	Ce que ça veut dire
16 – 20	Tes prérequis sont solides. L'enjeu de ton année n'est pas de comprendre, il est de <i>tenir le rythme</i> et de soigner la rédaction. Une mention est atteignable.
11 – 15	Les bases sont là, mais deux ou trois outils te manquent au moment où tu en as besoin. Repère lesquels grâce au tableau de la dernière page et reprends-les <i>avant</i> la Toussaint.
6 – 10	Le programme de 2 ^e Bac va te sembler aller trop vite, et ce ne sera pas de ta faute : ce sont les prérequis qui manquent. Un mois de reprise ciblée change complètement la suite.
0 – 5	Il faut reprendre les bases avant d'aborder le programme. C'est faisable — beaucoup d'élèves l'ont fait — mais pas tout seul et pas en trois semaines. Écris-moi, on regarde par où commencer.

★ Le vrai indicateur, ce n'est pas le total

Regarde *où* tu as perdu tes points. Perdre 4 points répartis sur les vingt questions n'a rien à voir avec perdre 4 points concentrés sur la partie B : le premier cas est du bruit, le second est un trou. Le tableau de la dernière page te donne la lecture par partie.



Partie A — Automatismes

8 questions · 0,5 pt chacune · 4 points

20 minutes maximum pour cette partie. Ce sont des gestes qui doivent être automatiques : si tu réfléchis plus d'une minute à l'une de ces questions, note-le, c'est déjà un résultat.

A.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 5x + 6 > 0$. [0,5 pt]

A.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x-1}{x+2} \leq 0$. [0,5 pt]

A.3 Calculer la dérivée de $f(x) = (2x-3)(x^2+1)$. [0,5 pt]

A.4 Calculer la dérivée de $g(x) = \sqrt{3x+1}$ sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$. [0,5 pt]

A.5 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{1 - 2x^2}$. [0,5 pt]

A.6 Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. [0,5 pt]

A.7 Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. [0,5 pt]

A.8 (u_n) est arithmétique, $u_1 = 5$ et $r = 3$. Calculer u_{10} puis $S = u_1 + \dots + u_{10}$. [0,5 pt]



Partie B — Étude de fonctions

2 exercices · 5 points

Exercice B.1 — fonction rationnelle et asymptote oblique [2,5 pt]

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}.$$

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- Calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- Vérifier que $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x-2}$ pour tout $x \in D_f$, puis en déduire que la droite $(\Delta) : y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

Exercice B.2 — tangente et théorème des valeurs intermédiaires [2,5 pt]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1, 2]$.
- Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Σ Partie C — Suites

2 exercices · 4 points

Exercice C.1 — suite arithmético-géométrique [2 pt]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On pose $v_n = u_n - 6$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice C.2 — raisonnement par récurrence [2 pt]

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , le nombre $B_n = 4^n + 5$ est divisible par 3.

Σ Partie D — Géométrie et trigonométrie

2 exercices · 7 points

Exercice D.1 — produit scalaire dans le plan [3,5 pt]

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ et $C(2, -1)$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC .
3. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC .
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

Exercice D.2 — équation et inéquation trigonométriques [3,5 pt]

1. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $2 \cos x + 1 > 0$.

Stop. Ne tourne la page qu'une fois le temps écoulé. Le corrigé n'a de valeur que si tu as vraiment cherché.

 Corrigé — Partie A

Barème : 0,5 pt par question, pas de demi-point

Corrigé A.1

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, du signe de $a = 1 > 0$ à l'extérieur des racines. Donc $S =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

Corrigé A.2

Le quotient est défini pour $x \neq -2$. Tableau de signes : $x - 1$ s'annule en 1, $x + 2$ en -2 . Le quotient est négatif entre les deux valeurs, et nul en 1 (valeur acceptée car l'inégalité est large). Donc $S =]-2, 1]$.

Corrigé A.3

$$f'(x) = 2(x^2 + 1) + (2x - 3) \times 2x = 2x^2 + 2 + 4x^2 - 6x = 6x^2 - 6x + 2.$$

Corrigé A.4

$$g'(x) = \frac{(3x + 1)'}{2\sqrt{3x + 1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

Corrigé A.5

Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$: on factorise par les termes de plus haut degré, $\frac{3x^2 - x + 1}{1 - 2x^2} \sim \frac{3x^2}{-2x^2}$, donc la limite vaut $-\frac{3}{2}$.

Corrigé A.6

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$: $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$ pour $x \neq 2$, donc la limite vaut 4.

Corrigé A.7

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \text{ donne } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi. \text{ Dans } [0, 2\pi[: S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}.$$

Corrigé A.8

$$u_{10} = u_1 + 9r = 5 + 27 = 32 \text{ et } S = \frac{10(u_1 + u_{10})}{2} = \frac{10 \times 37}{2} = 185.$$

 Corrigé — Partie B

Étude de fonctions

Corrigé B.1 (2,5 pt)

1. Domaine (0,25 pt). $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

2. Limites (0,75 pt). En $\pm\infty$, $f(x) \sim \frac{x^2}{x} = x$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
En 2, le numérateur tend vers $4 - 6 + 4 = 2 > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty,$$

et la droite $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

3. Asymptote oblique (0,75 pt). Pour $x \neq 2$:

$$x - 1 + \frac{2}{x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2) + 2}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 2 + 2}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2} = f(x).$$

Comme $f(x) - (x - 1) = \frac{2}{x - 2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, la droite $(\Delta) : y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Variations (0,75 pt). À partir de la forme décomposée :

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 2)^2 - 2}{(x - 2)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ est du signe de $(x - 2)^2 - 2 = (x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$, qui s'annule en $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,59$ et $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41$.

Signe de f' et variations de f :

- sur $] -\infty, 2 - \sqrt{2}]$: $f'(x) \geq 0$, f est croissante ;
- sur $[2 - \sqrt{2}, 2[$ puis sur $]2, 2 + \sqrt{2}]$: $f'(x) \leq 0$, f est décroissante ;
- sur $[2 + \sqrt{2}, +\infty[$: $f'(x) \geq 0$, f est croissante.

Autrement dit, f est croissante sur $] -\infty, 2 - \sqrt{2}]$, décroissante sur $[2 - \sqrt{2}, 2[$ et sur $]2, 2 + \sqrt{2}]$, puis croissante sur $[2 + \sqrt{2}, +\infty[$. Elle admet un maximum local $f(2 - \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$ et un minimum local $f(2 + \sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$.

Corrigé B.2 (2,5 pt)

1. Tangente en 0 (0,5 pt). $f'(x) = 3x^2 - 3$, donc $f'(0) = -3$ et $f(0) = 1$. La tangente a pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -3x + 1.$$

2. Variations (0,75 pt). $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$, positif à l'extérieur de $[-1, 1]$ et négatif à l'intérieur. Donc f est croissante sur $] -\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(-1) = 3$ (maximum local) et $f(1) = -1$ (minimum local).

3. Unicité de la solution (0,75 pt). f est continue sur $[1, 2]$ (fonction polynôme) et strictement croissante sur cet intervalle d'après la question 2. De plus

$$f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction continue et strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution α dans $[1, 2]$.

4. Encadrement (0,5 pt). $f(1,5) = 3,375 - 4,5 + 1 = -0,125 < 0$ et $f(1,6) = 4,096 - 4,8 + 1 = 0,296 > 0$.
Comme f est croissante : $1,5 < \alpha < 1,6$.

 Corrigé — Partie C

Suites

Corrigé C.1 (2 pt)

1. Premiers termes (0,25 pt). $u_1 = \frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4$ et $u_2 = \frac{1}{2} \times 4 + 3 = 5$.

2. (v_n) est géométrique (0,75 pt). Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 2 - 6 = -4$.

3. Expressions (0,5 pt). $v_n = v_0 q^n = -4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc

$$u_n = v_n + 6 = 6 - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

4. Limite (0,5 pt). Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.

Corrigé C.2 (2 pt)

Posons $P(n) : 3 \mid B_n$ où $B_n = 4^n + 5$.

Initialisation : $B_0 = 4^0 + 5 = 1 + 5 = 6 = 3 \times 2$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $B_n = 4^n + 5 = 3k$, c'est-à-dire $4^n = 3k - 5$. Alors

$$B_{n+1} = 4^{n+1} + 5 = 4 \times 4^n + 5 = 4(4^n + 5) - 20 + 5 = 4B_n - 15 = 4 \times 3k - 15 = 3(4k - 5).$$

B_{n+1} est donc un multiple de 3 : $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, B_n est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Vérification rapide : $B_1 = 9$, $B_2 = 21$, $B_3 = 69$.

 Corrigé — Partie D

Géométrie et trigonométrie

Corrigé D.1 (3,5 pt)

1. Produit scalaire (1 pt). $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 0.$$

2. Nature du triangle (0,75 pt). Le produit scalaire est nul, donc le triangle ABC est rectangle en A . De plus $AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$: le triangle est **rectangle et isocèle en A** .

3. Cercle circonscrit (1 pt). Le triangle étant rectangle en A , son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse $[BC]$. Son centre est le milieu $\Omega \left(\frac{4+2}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = \Omega(3, 1)$ et son rayon vaut

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{(2-4)^2 + (-1-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}.$$

Une équation du cercle est donc

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5.$$

4. Ensemble de points (0,75 pt). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ caractérise le cercle de diamètre $[AB]$, de centre le milieu $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)$ et de rayon $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Corrigé D.2 (3,5 pt)

1. Équation (2 pt). Posons $X = \sin x$, avec $X \in [-1, 1]$. L'équation devient $2X^2 + X - 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$:

$$X = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{-1-3}{4} = -1.$$

— $\sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ donne, dans $[0, 2\pi[$, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

— $\sin x = -1$ donne $x = \frac{3\pi}{2}$.

Donc $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

2. Inéquation (1,5 pt). $2 \cos x + 1 > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2}$. Or $\cos x = -\frac{1}{2}$ pour $x = \frac{2\pi}{3}$ et $x = \frac{4\pi}{3}$ dans $[0, 2\pi[$, et le cosinus est supérieur à $-\frac{1}{2}$ à l'extérieur de l'arc joignant ces deux points. D'où

$$S = \left[0, \frac{2\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right[.$$

 Ton score, et ce qu'il faut en faire

Dernière page

Lecture par partie

Partie	Sur	Si tu as perdu la moitié des points ou plus
A — Automatismes	4	Le problème n'est pas la compréhension, c'est l'entraînement. Il te faut du volume : vingt calculs par jour pendant trois semaines, pas un chapitre de plus.
B — Étude de fonctions	5	C'est le prérequis le plus coûteux : les six premiers chapitres de 2 ^e Bac sont de l'analyse, et l'examen national commence presque toujours par une étude de fonction. Reprends limites et dérivation de 1 ^{re} Bac en priorité absolue.
C — Suites	4	Un exercice entier de l'examen national, chaque année, avec un schéma très stable : suite auxiliaire, nature, expression, limite. C'est le gisement de points le plus rentable du programme.
D — Géométrie et trigonométrie	7	Le produit scalaire revient dans l'espace au deuxième semestre, et la trigonométrie dans les nombres complexes. Ce que tu ne rattrapes pas maintenant te coûtera deux fois.

Les trois chapitres à reprendre en priorité

Sur mathexce.com, les cours, les fiches de révision et les QCM auto-corrigés sont en accès libre — sans compte, sans email à donner. Les examens nationaux corrigés y sont également publiés.

1. **Généralités sur les fonctions, limites et dérivation** : le socle de la partie B, et des six premiers chapitres de l'année.
2. **Suites numériques** : le socle de la partie C, et un exercice entier à l'examen national.
3. **Produit scalaire et calcul trigonométrique** : la partie D, qui revient dans la géométrie de l'espace et dans les nombres complexes.

★ Si tu veux qu'on regarde ta copie ensemble

Envoie-moi ton score par partie sur WhatsApp au **06 76 40 91 06**. Je te réponds avec les deux ou trois choses précises à reprendre en priorité dans ton cas — que tu rejoignes le *Programme Excellence* ou non. Ça ne coûte rien et ça t'évite de travailler au hasard pendant un mois.

Le programme d'accompagnement, son contenu semaine par semaine et son tarif sont décrits sur mathexce.com/programme.

*Document gratuit — Math Excellence — Professeur de mathématiques — mathexce.com
Tu peux l'imprimer et le partager avec tes camarades.*